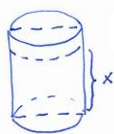


8 Tělesa – povrchy a objemy

- ① Válec s podstavou o obsahu 8 dm^2 má objem 120 litrů. Z válce zcela naplněného vodou se 40 litrů vody odebralo.

V jaké výšce ode dna (s přesností na dm) je vodní hladina?



$$V = 120 \text{ l} = 120 \text{ dm}^3$$

$$V' = 80 \text{ l} = 80 \text{ dm}^3$$

$$S_p = 8 \text{ dm}^2$$

$$V' = S_p \cdot x$$

$$80 = 8 \cdot x \quad | :8$$

$$x = 10 \text{ dm}$$

(A)

- A) 10 dm
B) 15 dm
C) 44 dm
D) 64 dm
E) v jiné

- ② Některé z bodů vyznačených v síti kvádrů představují ve složeném kvádrů jeden a týž vrchol.

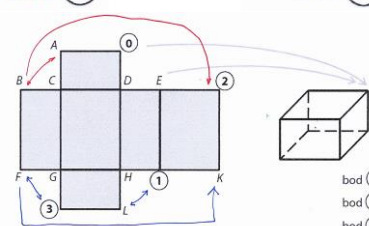
Např. dva různé body ① a E síti kvádrů představují ve složeném kvádrů stejný vrchol.

Připište k uvedenému bodu všechny body síti kvádrů, které ve složeném kvádrů představují stejný vrchol.

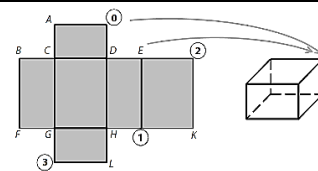
bod ①

bod ②

bod ③



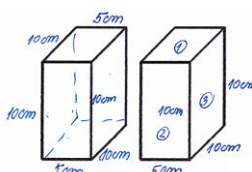
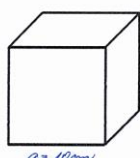
bod ① L
bod ② B, A
bod ③ F, K



- ③ Krychle o hraně 10 cm je rozpuřena na dva shodné kvádry.

Jaký je povrch jednoho z obou shodných kvádrů?

- A) 300 cm^2 B) 350 cm^2 C) 420 cm^2 D) 450 cm^2 E) jiný povrch



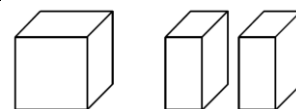
$$S = 2 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \cdot 10$$

$$S = 100 + 100 + 200$$

$$S = 400 \text{ cm}^2$$

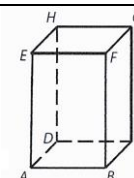
$$[\text{D} \text{ a} \text{ E} \text{ stejné - ale } S = 4 \cdot 5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \cdot 10]$$

(E)



- ④ Kvádr má čtvercovou podstavu o obsahu 25 cm^2 . Obsah boční stěny je o 5 cm^2 větší než obsah podstavy.

Jaký je objem kvádrů?



- A) 125 cm^3
B) 150 cm^3
C) 170 cm^3
D) 175 cm^3
E) jiný objem

$$S_p = S_{\square} = a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

$$\text{obsah boční stěny o 5 větší než } S_p (= 25 \text{ cm}^2)$$

$$\Rightarrow S_B = 25 + 5 = 30 \text{ cm}^2$$

$$V = S_p \cdot v$$

$$V = 25 \cdot 6$$

$$V = 150 \text{ cm}^3$$

(B)

$$S_B = a \cdot v$$

$$30 = 5 \cdot v$$

$$v = 6 \text{ cm}$$

- ⑤ Kvádr má čtvercovou podstavu. Obsah podstavy je 64 cm^2 . Výška kvádrů je 4krát kratší než hrana a.

Jaký je povrch kvádrů?

- A) 128 cm^2 B) 192 cm^2 C) 224 cm^2 D) 256 cm^2 E) jiný povrch

$$S_p = S_{\square} = 64 \Rightarrow a = 8 \text{ cm}$$

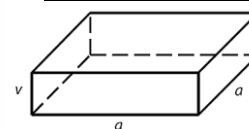
$$\text{výška 4x kratší} \Rightarrow v = \frac{a}{4} = 2 \text{ cm}$$

$$S = 2S_p + S_{pl}$$

$$S = 2S_{\square} + 4S_{\square} = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 \cdot 2$$

$$S = 2 \cdot 64 + 64 = 128 + 64 = 192 \text{ cm}^2$$

(B)

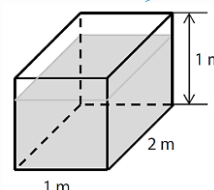


- ⑥ Nádrž s vodou má tvar kvádrů. Rozměry nádrže jsou uvedeny v obrázku.

Zahrádkář naplnil vodou z nádrže 15 prázdných dvanáctilitrových konví, a hladina vody v nádrže tak klesla.

O kolik cm klesla hladina vody v nádrže?

- A) o méně než 9 cm B) o 9 cm C) o 10 cm D) o 11 cm E) o více než 11 cm



$$S_p = 1.2 = 2 \text{ m}^2$$

$$V_N = 1.2 \cdot 1 = 2 \text{ m}^3 = 2000 \text{ dm}^3$$

$$V_N = 2000 \text{ l}$$

odečteno ... 15.12 l

$$= 180 \text{ l}$$

$$= 180 \text{ dm}^3$$

$$= 0.18 \text{ m}^3$$

$$\frac{15}{12} = \frac{30}{180}$$

hladiná klesla o x

$$V_0 = S_p \cdot x$$

$$0.18 = 1.2 \cdot x$$

$$0.18 = 2x$$

$$x = 0.09 \text{ m}$$

$$x = 9 \text{ cm}$$

(B)

NEBO Nbylo

$$V_z = 2000 - 180$$

$$V_z = 1820 \text{ dm}^3$$

$$= 1.82 \text{ m}^3$$

$$V_z = S_p \cdot v$$

$$1.82 = 1.2 \cdot v$$

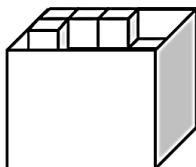
$$v = 0.91 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x = 1 - 0.91 = 0.09 \text{ m}$$

$$= 9 \text{ cm}$$

7

Krabici tvaru kvádru lze naplnit až po okraj krychličkami s délkou hrany 2 cm. Na dno krabice se do jedné vrstvy naskládá bez mezer 20 krychliček a takové vrstvy mohou být v krabici nejvýše 4.



Ze zcela naplněné krabice vyjmeme všechny krychličky a vytvoříme z nich jedinou řadu.



Jak dlouhá bude řada? C) 2,0 m

A) 0,8 m D) 2,4 m

B) 1,6 m E) delší než

Jaký je objem krabice? C) 480 cm³A) 160 cm³ D) 640 cm³B) 320 cm³ E) jiný obje

1. dno 20 krychliček $\times$ A restky = 80 krychl.

$\Rightarrow$ do řady, délka hrany 2 cm

$\Rightarrow$ délka řady .. 80.2 cm = 160 cm

$$= 1.6 \text{ m} \quad \text{(B)}$$

2. Objem krabice

- podstava 20 $S_p = 20 \cdot 2^2 = 80 \text{ cm}^2$

- výška 4 restky $v = 4 \cdot 2 = 8 \text{ cm}$

$$V_k = 80 \cdot 8 = 640 \text{ cm}^3 \quad \text{(D)}$$

8

Kolmý hranol, jehož podstavy tvoří pravoúhlé trojúhelníky, má stejný objem jako kvádr.

Jaký je chybějící rozměr kvádru?

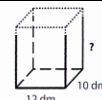
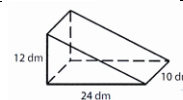
A) 8 dm

B) 12 dm

D) 16 dm

C) 15 dm

E) jiný počet dm



$$V_H = S_p \cdot v \Rightarrow S_p = S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12$$

$$V_H = 144 \cdot 10 \quad S_p = 144 \text{ dm}^2$$

$$V_H = 1440 \text{ dm}^3$$

$$V_k = V_H \quad 1440 = S_p \cdot v \quad S_p = 12 \cdot 10 = 120 \text{ dm}^2$$

$$1440 = 120 \cdot v$$

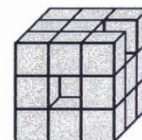
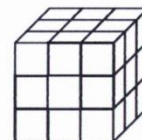
$$144 = 12v \quad |:12$$

$$v = 12 \text{ dm} \quad \text{(B)}$$

9

Krychle byla slepena z 27 malých bílých krychliček o hraně délky 2 cm. Dvě malé krychličky jsme odstranili, a vzniklo tak nové těleso. Všechny dostupné plochy nového tělesa jsme obarvili na šedo (i zespodu).

Jaký je celkový obsah šedých ploch nového tělesa?

A) menší než 236 cm²B) 236 cm² D) 244 cm²C) 240 cm² E) větší než 244 cm²

u šedého tělesa o 4 stěny krychličky a 2 stěny krychličky

nebo můžeme v bílém tělese

$\Rightarrow$ bílé těleso 6.9 stěn $\square + 6$ másto

$\Rightarrow 60$ stěn $\square = 60 \cdot 2 \cdot 2 = 240 \text{ cm}^2$

$$S_p \quad \text{(C)}$$

10

Rotační válec s podstavou o poloměru 5 cm stojící na vodorovné podložce jsme svislými řezy rozdělili na čtyři shodná nová tělesa.

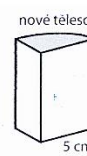
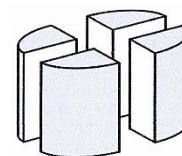
Povrch válce byl šedý (včetně podstav), ale všechny nové plochy vytvořené rozříznutím jsou bílé.

Součet obsahů obou bílých ploch na jednom z nových těles je 80 cm².

Jaký je objem jednoho z nových těles?

A) menší než 125 cm³C) 141 cm³D) 157 cm³

Výsledek je zaokrouhlen na celé cm³.

B) 126 cm³E) větší než 158 cm³

Objem nového tělesa $r = 5 \text{ cm}$

$$V = \frac{1}{4} V_v = \frac{1}{4} S_p \cdot v = \frac{1}{4} S_0 \cdot v \quad [S_0 = \pi r^2]$$

$$V = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2 v = \frac{1}{4} \pi \cdot 5^2 \cdot 8 = \frac{8}{4} \cdot 25 \cdot \pi = 50\pi$$

$$V = 50 \cdot 3.14 = 157 \text{ cm}^3 \quad \text{(D)}$$

součet obsahů bílých ploch

$$S = 80 \text{ cm}^2 = 2 S_p$$

$$80 = 2 S_p \quad 40 = \pi r \cdot v$$

$$S_p = 40 \quad 40 = 5v$$

$$v = 8 \text{ cm}$$

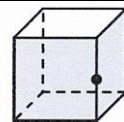
11

V krychli mají každé dvě sousední stěny jednu společnou hranu.

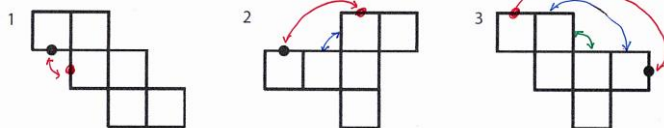
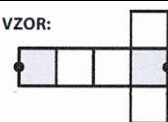
V síti krychle mohou být některé sousední stěny krychle odděleny. Pak tutéž hranu krychle představují dvě různé úsečky sítě (označené tmavými kolečky).

V každé ze tří následujících sítí krychle je tmavým kolečkem označena jedna z obou úseček představujících tutéž hranu krychle.

Dalším kolečkem označte druhou z těchto úseček.



VZOR:



12

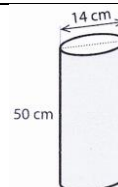
Škrabací sloupek pro kočky má tvar rotačního válce.

Válec má výšku 50 cm a jeho podstava má průměr 14 cm.

Obě podstavy jsou bílé, plášť válce je šedý. (Za π dosazujte $\frac{22}{7}$.)

Vypočítejte v cm^2

1 obsah jedné podstavy válce, 2 obsah pláště válce.



$$1. S_p = S_o = \pi r^2 (= \frac{\pi d^2}{4}) \quad d = 2r \Rightarrow r = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

$$S_p = \frac{22}{7} \cdot 7^2 = \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot 7 = 22 \cdot 7 = 154 \text{ cm}^2$$

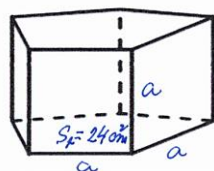
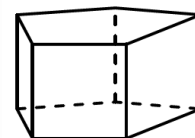
$$2. S_{pl} = S_{pl} = 2\pi r h = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 7 \cdot 50 = 100 \cdot 22 = 2200 \text{ cm}^2$$

13

Podstavou kolmého pětibokého hranolu je pětiúhelník o obvodu 20 cm a obsahu 24 cm^2 . Všechny hrany hranolu mají stejnou délku.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení, zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

- | | A | N |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1 Součet délek všech hran hranolu je 60 cm. | ☐ | ☐ |
| 2 Obsah podstavy je o polovinu větší než obsah jedné boční stěny hranolu. | ☐ | ☐ |
| 3 Objem hranolu je 96 cm^3 . | ☐ | ☐ |



*některé hrany stejné délky $a = 5a = 20 \text{ cm}$
pětiboká $a = 4 \text{ cm}$*

$a = v$ počet hran hranolu ... $5 + 5 + 5 = 15$

1. součet délek hran $15 = 15 \cdot 4 = 60 \text{ cm}$ (A)

2. obsah 1 boční stěny $S_p = S_{\square} = a^2 = 16 \text{ cm}^2$

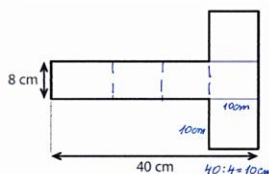
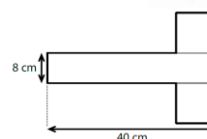
obsah podstavy $S_p = 24 \text{ cm}^2 \Rightarrow S_p = S + \frac{1}{2} S_p = 16 + 8 = 24 \text{ cm}^2$ (A)

3. objem $V = S_p \cdot v = 24 \cdot 4 = 96 \text{ cm}^3$ (A)

14

Síť kolmého čtyřbokého hranolu se skládá ze dvou shodných čtverců a obdélníku s rozměry 40 cm a 8 cm (viz náčrt obrysu sítě).

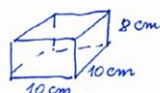
Vypočítejte 1 v cm^2 povrch hranolu,
2 v cm^3 objem hranolu.



$$1. S = S_{pl} + 2 S_p \quad S_p = S_{\square} = 10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$$

$$S = 40 \cdot 8 + 2 \cdot 100$$

$$S = 320 + 200 = 520 \text{ cm}^2$$



$$2. V = S_p \cdot v \quad v = 8 \text{ cm}$$

$$V = S_{\square} \cdot v$$

$$V = 100 \cdot 8 = 800 \text{ cm}^3$$

15

Válcovací stroj se pohyboval v přímém směru vpřed. Jeho přední rotační válec vykonal při tomto pohybu 200 otáček (bez prokluzu).

Přední rotační válec má průměr podstavy 0,5 m a zanechává za sebou uválcovaný pás široký 0,8 m. (Jedna otáčka je otočení kolem osy válce o 360° .)

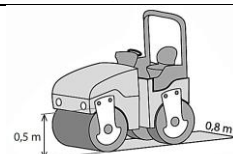
Kolik m^2 uválcoval přední rotační válec? Výsledek je zaokrouhlen na celé m^2 . Za π lze dosadit 3,14.

A) méně než 250 m^2 B) 251 m^2 C) 314 m^2 D) 331 m^2 E) více než 332 m^2

*průměr válce $d = 0,5 \text{ m} \Rightarrow r = 0,25 \text{ m}$
uválcovaný plochu stran obdélníka*



$$S = 0,8 \cdot x = 0,8 \cdot 314 = 251,2 \text{ m}^2 \approx 251 \text{ m}^2 \quad \text{(B)}$$



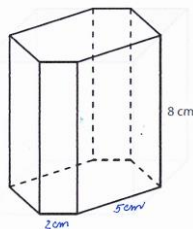
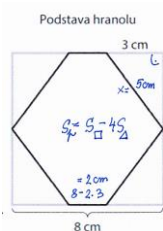
- 16) Kolmý šestiboký hranol byl vytvořen opracováním krychle o hraně délky 8 cm.
Podstava hranolu vznikne ze čtvercové stěny původní krychle oddělením 4 shodných pravoúhlých trojúhelníků s odvěsnami délek 3 cm a 4 cm.
Výška hranolu je 8 cm.

Jaký je objem šestibokého hranolu?

- A) 128 cm³ B) 320 cm³ C) 416 cm³ D) 488 cm³ E) jiný objem

Jaký je povrch šestibokého hranolu?

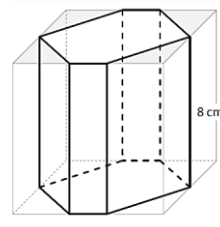
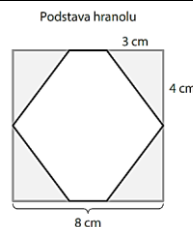
- A) 160 cm² B) 192 cm² C) 240 cm² D) 272 cm² E) 336 cm²



$$V = S_p \cdot v \\ V = 40 \cdot 8 \\ V = 320 \text{ cm}^3 \quad \textcircled{B}$$

$$S = 2S_p + S_{pl}$$

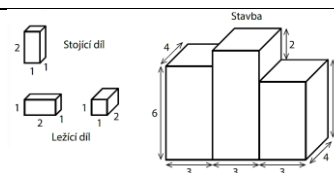
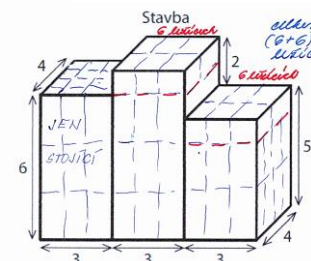
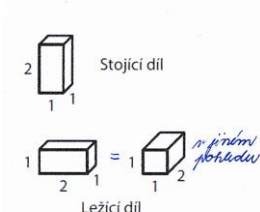
$$S = 2 \cdot 40 + 192 = 80 + 192 = 272 \text{ cm}^2 \quad \textcircled{D}$$



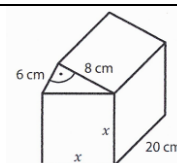
- 17) Všechny díly stavebnice jsou pravidelné čtyřboké hranoly s rozměry 1 cm x 1 cm x 2 cm.
Ve stavbě, která má podobu tří spojených kvádrů, jsou jednotlivé díly naskládány bez mezer tak, aby stavba obsahovala **co největší počet** stojících dílů. Stojící díl má dole čtvercovou stěnu, ležící díl nikoli. Rozměry v obrázku jsou v cm.

Kolik ležících dílů stavba obsahuje?

- A) 0 B) 6 C) 12 D) 18 E) 24



- 18) Domeček je vytvořen z pravidelného čtyřbokého hranolu a kolmého trojbokého hranolu.
Oba hranoly mají jednu stěnu společnou. Rozměry čtyřbokého hranolu jsou x , x a 20 cm.
Podstavou trojbokého hranolu je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 6 cm a 8 cm.
Vypočítejte v cm³ 1 objem trojbokého hranolu, 2 objem pravidelného čtyřbokého hranolu.



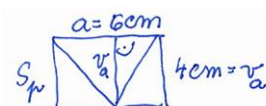
$$1. V = S_p \cdot v = S_{\Delta} \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 20 = 10 \cdot 6 \cdot 8 = 480 \text{ cm}^3$$

$$2. \text{Např. } x \text{ k pr. } \Delta \text{ pomocí Pyth. v. } V = S_p \cdot v = S_{\square} \cdot v = x^2 \cdot v \\ x^2 = 6^2 + 8^2 \quad x^2 = 100 \quad V = 10^2 \cdot 20 = 100 \cdot 20 = 2000 \text{ cm}^3 \\ x^2 = 36 + 64 \quad x = 10 \text{ cm} \quad V = 10^2 \cdot 20 = 2000 \text{ cm}^3$$

- 19) Kvádr o rozměrech 6 cm, 4 cm a 5 cm jsme dvěma svislými řezy rozdělili na tři kolmé trojboké hranoly.
Z těchto trojbokých hranolů vybereme ten, který má **největší objem**.

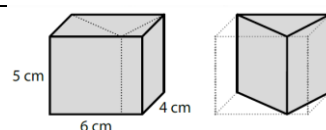
Jaký je objem vybraného trojbokého hranolu?

- A) 40 cm³ B) 60 cm³ C) 80 cm³ D) 120 cm³ E) jiný objem



$$S_p = S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \text{ cm}^2$$

$$V = S_p \cdot v = 12 \cdot 5 = 60 \text{ cm}^3 \quad \textcircled{B}$$



- 20) Penál má tvar rotačního válce.

Poloměr podstavy válce je 5 cm a výška válce 20 cm.
Obě podstavy válce jsou bílé a plášť válce je tmavý.

Kolikrát větší je obsah pláště válce než obsah jedné podstavy?

- A) 4krát B) 6krát C) 8krát D) 10krát E) 20krát

$$r = 5 \text{ cm} \\ h = 20 \text{ cm}$$

$$S_{pl} = S_{\square} = \sigma \cdot v = 2\pi r v \\ S_{pl} = 2\pi \cdot 5 \cdot 20 \\ S_{pl} = 200\pi$$

$$S_p = S_{\square} = \pi r^2 \\ S_p = \pi \cdot 5^2 \\ S_p = 25\pi$$

$$\frac{S_{pl}}{S_p} = \frac{200\pi}{25\pi} = 8 \quad \text{8krát} \quad \textcircled{C}$$

